Bestimmung der Orte gewisser Elemente,

welche drei collinearen Räumen gegenüber eine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Facultät

der

kgl. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht

von

Otto Dotterweich

aus Bamberg.

München 1885.

Kgl. Hof- & Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Bestimmung der Orte gewisser Elemente,

welche drei collinearen Räumen gegenüber eine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Facultät

der

kgl. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht

von

Otto Dotterweich

aus Bamberg.

München 1885.

Kgl. Hof- & Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556029_0073

Die zu drei collinearen Räumen gehörigen Strahlenkomplexe.

Von zwei collinearen Räumen wird ein tetraedraler Strahlencomplex zweiter Ordnung, zweiter Klasse sowohl durch die Verbindungslinien homologer Punkte als auch durch die Schnittlinien homologer Ebenen erzeugt und gehören ihm desshalb von jedem Raume alle Geraden an, welche von den homologen des anderen geschnitten werden. Durch jeden Punkt geht im Allgemeinen ein Kegel zweiter Ordnung von Complexstrahlen und in jeder Ebene liegt ein Büschel zweiter Ordnung solcher Strahlen. Es gibt jedoch vier Punkte und vier Ebenen, deren sämmtliche Gerade dem Complexe angehören, nämlich jene Punkte und Ebenen, welche die Räume entsprechend gemein haben. Sie bilden das Fundamentaltetraeder des Complexes und sind entweder reell oder paarweise imaginär *)

Sind Σ_i und Σ_k die erzeugenden Räume, so möge der Complex mit Γ_{ik} bezeichnet werden; die Ecken des Fundamentaltetraeders sollen A_{ik}^{x} heissen, wo unter x eine bestimmte

*) Reye, Geometrie der Lage. II. Aufl. II. Theil XVIII. Vortrag.

der Zahlen 1, 2, 3, 4 zu verstehen ist; die dem Punkte $A_{ik}^{\varkappa}$ gegenüberliegende Tetraederebene werde $\alpha_{ik}^{\varkappa}$ genannt.

Drei collineare Räume Σ_i Σ_k Σ_l geben zu drei Strahlencomplexen Anlass; denn weil Γ_{ik} und Γ_{ki} denselben Complex bezeichnen, so liefert jede Combination der Räume zu zweien einen Complex.

Die den Elementen $A_{ik}^{\varkappa}$ und $\alpha_{ik}^{\varkappa}$ in Σ_l entsprechenden Elemente sollen durch $A_{ik}'^{\varkappa}$ resp. $\alpha_{ik}'^{\varkappa}$ bezeichnet werden und das von ihnen gebildete Tetraeder heisse das »Nebentetraeder« des Complexes Γ_{ik}.

Durch jeden Punkt geht ein Kegel zweiter Ordnung des Complexes Γ_{ik} und ein ebensolcher Kegel des Complexes Γ_{il}; da diese beiden Kegel vier Strahlen, die entweder alle reell oder paarweise imaginär sind, gemein haben, so gehen durch jeden Punkt vier Strahlen, welche beiden Complexen gleichzeitig angehören; ebenso zeigt man, dass in jeder Ebene vier zu beiden Complexen gehörige Gerade liegen; also:

Die Strahlencomplexe Γ_{ik} und Γ_{il} haben ein Strahlsystem vierter Ordnung, vierter Klasse gemein.

Jeder Strahl p_i dieses Systems, als Strahl des Raumes Σ_i aufgefasst, wird von den ihm in Σ_k und Σ_l correspondirenden Geraden geschnitten, weil er zum Complexe Γ_{ik} und Γ_{il} gehört, also:

Die Strahlen p_i des Raumes Σ_i, welche von den in Σ_k und Σ_l correspondirenden Geraden geschnitten werden, bilden ein Strahlsystem vierter Ordnung, vierter Klasse.

Weil dieses System aus Strahlen des Raumes Σ_i besteht,

so werde es mit X_i bezeichnet. Zu jedem der drei Räume gehört ein solches System.

Flächen vierter Ordnung.

Unter allen Strahlen des Complexes Γ_{ik}, welche durch einen Punkt P_i gehen, ist derjenige ausgezeichnet, welcher von dem ihm in Σ_k entsprechenden Strahle im Punkte P_i geschnitten wird. Rechnet man den Punkt P_i zu Σ_k und bezeichnet ihn mit Q_k, so ist $P_i\,Q_i$ dieser ausgezeichnete Strahl, wenn Q_i und Q_k homologe Elemente sind.

Nun möge sich $P_i\,[Q_k]$ auf einer beliebigen Geraden bewegen. Rechnet man dieselbe zum Raume Σ_k und bezeichnet sie mit m_k, so entspricht ihr in Σ_i eine Gerade m_i, der Punktreihe Q_k auf m_k entspricht eine zu ihr projectivische Punktreihe Q_i auf m_i. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser projectivischen Reihen sind, weil Q_k mit P_i identisch, diejenigen Geraden s_i des Raumes Σ_i, welche von den in Σ_k entsprechenden Strahlen s_k in den Punkten der Geraden m_k geschnitten werden. Diese Geraden bilden im Allgemeinen eine Regelschaar R_i^2 zweiter Ordnung. Dieselbe geht in ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung über, wenn m_k und m_i in einer Ebene liegen, also m_k Complexstrahl von Γ_{ik} ist. Dieses Strahlenbüschel wiederum degenerirt in zwei Strahlbüschel erster Ordnung, wenn die Punktreihen auf m_i und m_k perspectivisch liegen; in diesem Falle ist der Schnittpunkt beider Geraden entsprechender Punkt der projectivischen Reihen, also homologer Punkt Σ_i und Σ_k d. h. ein Punkt A_{ik}^x. Er ist das Centrum des einen Strahl-

büschels; das des anderen liegt auf der Schnittgeraden der Ebenen $[m_i\ m_k]$ und α_{ik}^{x}, weil die Punkte $(\alpha_{ik}^{x}\ m_i)$ und $(\alpha_{ik}^{x}\ m_k)$ homologe Punkte der Reihen auf m_i und m_k sind. Ist endlich m_k Kante des Fundamentaltetraeders des Complexes Γ_{ik}, so fällt m_i auf m_k. Man hat demnach:

Die Strahlen des Raumes Σ_i, welche von den entsprechenden Geraden des Raumes Σ_k in den Punkten einer beliebigen Geraden m_k getroffen werden, bilden eine Regelschaar R_i zweiter Ordnung, welche bei speziellen Lagen der Geraden entartet.

Rechnet man m_k zu Σ_i und bezeichnet es mit n_i, so entsprechen den Geraden m_i und n_i in Σ_l die Geraden m_l und n_l, den Punktreihen P_i und Q_i auf n_i resp. m_i die zu ihnen projectivischen Reihen P_l und Q_l auf n_l resp. m_l und somit den Geraden $P_i\ Q_i = s_i$ die Geraden $P_l\ Q_l = s_l$. Die s_l bilden eine Regelschaar R_l^2 zweiter Ordnuug, welche gleichzeitig mit R_i^2 degenerirt, weil sich mit m_i und n_i die Geraden m_l und n_l gleichzeitig schneiden und decken und die Punktreihen P_l und Q_l gleichzeitig mit P_i und Q_i perspectivisch liegen. Auch ist die Regelschaar R_l^2 projectivisch auf R_i^2 bezogen, wenn jedem Strahle s_l der homologe s_i zugewiesen wird.

Die beiden Hyperboloide, auf welchen die Regelschaaren R_i^2 und R_l^2 liegen, schneiden sich in einer Raumcurve C^4 vierter Ordnung. Nun sei r_i ein beliebiger Leitstrahl der Schaar R_i, r_l ein solcher der Schaar R_l^2. Auf jedem dieser Strahlen liegen zwei Punkte von C^4 und aus jedem wird die zugehörige Schaar durch einen zu ihr projektivischen Ebenenbüschel erster Ordung projicirt. Diese beiden Büschel sind

projectivisch aufeinander bezogen, wenn jeder Ebene des ersten, welche einen Strahl s_i projicirt, die Ebene des zweiten zugegewiesen wird, welche den homologen Strahl s_i projicirt; sie erzeugen dann ein Hyperboloid R^2. Wenn nicht die Schnittcurve C^4 in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung degenerirt und nicht alle homologen Strahlen der Schaaren R_i^2 und R_i^2 sich schneiden, so haben die drei Hyperboloide höchstens acht Punkte gemein: vier von diesen sind die Schnittpunkte der Geraden r_i und r_i mit C^4, die übrigen vier sind jene Punkte, in welchen sich homologe Strahlen der projectivischen Regelschaaren R_i^2 und R_i^2 schneiden; daraus folgt der Satz:

Sind zwei Regelschaaren R_i^2 und R_i^2 projectivisch aufeinander bezogen, so schneiden sich im Allgemeinen vier Paare homologer Strahlen.

Gehen die Regelschaaren in zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung über, so schneiden sich auf der Schnittlinie der tragenden Ebenen gleichfalls vier homologe Strahlen s_i und s_i. Dreht man nämlich die Ebene des einen Büschels um diese Schnittlinie, bis sie mit der Ebene des anderen Büschels zusammenfällt, so erzeugen die projectivischen Strahlbüschel eine ebene Curve vierter Ordnung, die von jeder Geraden in vier Punkten getroffen wird.

Degeneriren endlich diese Büschel in je zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, so schneiden sich von je zwei homologen Büscheln je zwei homologe Strahlen; es gibt auch in diesem Falle vier Strahlen s_i welche von den homologen s_i geschnitten werden.

Die Strahlen s_i welche von den entsprechenden s_i ge-

schnitten werden, sind aber Strahlen p_i des Systemes X_i. Abgesehen von dem Falle, dass m_i und m_k ineinanderliegen, welcher Fall nachträglich besprochen werde soll, ist also für eine beliebige Gerade m_k nachgewiesen, dass es auf ihr vier Punkte gibt, in welchen ein Strahl p_i des Systems X_i von dem in Σ_k entsprechenden Strahle p_k geschnitten wird. Da ferner die Punkte $(p_i\ p_k)$, und $(p_i\ p_l)$ dem Systeme X_i ganz gleich gegenüberstehen, so gilt der Satz:

Versteht man unter p_i die Strahlen, welche von den homologen Strahlen p_k und p_l geschnitten, werden, so bilden sowohl die Punkte $(p_i\ p_k)$ als auch die Punkte $(p_i\ p_l)$ eine Fläche vierter Ordnung.

Die von den Punkten $(p_i\ p_k)$, gebildete Fläche soll fernerhin mit F^4_{ik} bezeichnet werden, wobei zu bemerken ist, dass die Indices ik in ihrer Stellung nicht vertauscht werden können; denn während auf F^4_{ik} diejenigen Punkte liegen, in welchen die Strahlen des Systemes X_i von den in Σ_k correspondirenden Geraden getroffen werden, ist F^4_{ki} der Ort der Punkte, durch welche ein Systemstrahl von X_k und die ihm in Σ_i correspondirende Gerade geht. Aus dieser Bezeichnungsweise folgt unmittelbar, dass die drei Räume zu so viel Flächen F^4 Anlass geben, als es Variationen dreier Elemente zu zweien gibt, also zu sechs Flächen.

Doppelpunkte auf F^4_{ik}.

Zu den Doppelpunkten auf F^4_{ik} führt die Annahme, dass die Gerade m_k Tetraederkarte des Complexes Γ_{ik} ist. Die projectivischen Punktreihen Q_i und Q_k liegen aufeinander, so

dass der Strahl s_i, welcher in Q_k von dem entsprechenden s_k geschnitten wird, die Gerade m_k selbst ist. Da diesem Strahle in Σ_i eine Kante des Nebentetraeders des Complexes Γ_{ik} entspricht, welche bei allgemeiner Annahme der drei Räume m_k nicht schneidet, so liegt kein Punkt von m_k auf F^4_{ik}, wenn es nicht auf m_k Punkte gibt, durch welche von m_k verschiedene Strahlen s_i gehen. In der That gibt es zwei solche Punkte, nämlich die zwei auf m_k liegenden Punkte A^x_{ik}. Da diese Punkte die Doppelpunkte der Reihen Q_i und Q_k sind, so ist jeder Strahl durch A^λ_{ik} ein Strahl s_i, welcher vom homologen s_k in $A^\varkappa_{ik}$ geschnitten wird.

Jedem dieser Strahlen s_i entspricht in Σ_i ein Strahl s_i durch $A'^\varkappa_{ik}$ und die Bündel A^λ_{ik} und $A'^\varkappa_{ik}$ sind collinear aufeinander bezogen. So oft zwei entsprechende Strahlen der Bündel sich schneiden, ebenso oft wird der Punkt A^λ_{ik} als Punkt der Fläche F^4_{ik} erhalten.

Nun erzeugen die collinearen Bündel durch die Schnittpunkte homologer Strahlen eine Raumcurve dritter Ordnung und in jeder Ebene durch A^λ_{ik} liegen zwei durch $A^\varkappa_{ik}$ gehende Sehnen derselben. Jede solche Ebene schneidet demnach F^4_{ik} in einer ebenen Curve vierter Ordnung, für welche A^λ_{ik} Doppelpunkt ist; folglich ist A^λ_{ik} Doppelpunkt der Fläche F^4_{ik}. Weil A^λ_{ik} identisch mit $A^\varkappa_{ki}$, so sind eben diese Punkte auch Doppelpunkte vor F^4_{ki} und es gilt:

Die Eckpunkte des Fundamentaltetraeders eines Complexes sind Doppelpunkte der beiden Flächen vierter Ordnung, welche dieselben Indices besitzen wie der Complex.

Da die Geraden, welche die Raumcurve aus A^{x}_{ik} projiciren, einen Kegel zweiter Ordnung bilden, diese Geraden p_i Strahlen des Systems X_i sind, und weil endlich die Complexe Γ_{ik} und Γ_{il} dem Systeme X_i gegenüber dieselbe Rolle spielen, lässt sich folgern:

Das Strahlensystem X_i enthält acht Kegel zweiter Ordnung; es sind die zu den Complexen Γ_{il} und Γ_{ik} gehörigen Kegel, deren Mittelpunkte die A^{x}_{ik} resp. die A^{x}_{il} sind.

Raumcurven dritter Ordnung auf F^{4}_{il}.

Sind p_i und p_l homologe, sich schneidende Strahlen der Bündel A^{x}_{ik} und A'^{x}_{ik}, so ist der Punkt $(p_i\, p_l)$ ein Punkt der Fläche F^{4}_{il}, weil jeder Strahl p_i, der durch A^{x}_{ik} von dem in Σ_k correspondirenden Strahl p_k [in A^{x}_{ik}] geschnitten wird. Die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte homologer Strahlen der Bündel A^{x}_{ik} und A'^{x}_{ik} gebildet wird, wenn A^{x}_{ik} als Bündel des Raumes Σ_i betrachtet wird, liegt ganz auf F^{4}_{il}.

Diese Curve ist durch sechs ihrer Punkte bestimmt; denn auf ihr liegen: 1. der Eckpunkt A^{x}_{ik} des Fundamentaltetraeders des Complexes Γ_{ik}; 2. der homologe Eckpunkt des Nebentetraeders dieses Complexes und 3. die vier Eckpunkte des Fundamentaltetraeders des Complexes Γ_{il}, eine solche Ecke A^{y}_{il} gehört der Curve an, weil die Geraden $[A^{x}_{ik}\, A^{y}_{il}]$ und $[A'^{x}_{ik}\, A^{y}_{il}]$ als Verbindungslinie homologer Punktpaare der Räume Σ_i und Σ_l homologe Strahlen der Bündel A^{x}_{ik} und A'^{x}_{ik} sind.

Die Schnittcurven der Flächen vierter Ordnung.

Die Schnittcurve zweier der sechs Flächen vierter Ordnung ist eine Raumcurve sechzehnter Ordnung. Die Punkte derselben haben den drei Räumen gegenüber je nach Art der Zusammenstellung der Flächen eine verschiedene Eigenschaft.

Bei der Untersuchung müssen vier Fälle unterschieden werden; es schneiden sich:

I. Zwei Flächen mit gleichem Index an erster Stelle wie F^4_{ik} und F^4_{il}. Durch jeden Punkt P der Schnittlinie gehen dann zwei Strahlen des Systemes X_i, von denen der eine p_i von dem in Σ_k entsprechenden Strahle p_k, der andere p_i von dem in Σ_l entsprechenden Strahle p'_l in P getroffen wird;

II. zwei Flächen mit gleichem Index an zweiter Stelle wie F^4_{ki} und F^4_{li}; dann geht durch P ein Strahl p_k des Systemes X_k und der entsprechende p_i von Σ_i, sowie ein Strahl p'_l des Systemes X_l und der entsprechende Strahl p'_i von Σ_i;

III. zwei Flächen, welche dieselben Indices, aber an verschiedenen Stellen besitzen wie F^4_{ik} und F^4_{ki}; durch jeden Punkt P geht ein Strahl p_i des Systems X_i und der entsprechende p_k des Raumes Σ_k, sowie ein Strahl p'_k des Systemes Σ_k und der entsprechende p'_i des Raumes Σ_i.

IV. zwei Flächen, welche die drei Indices besitzen, aber an keiner Stelle den gleichen, wie F^4_{ik} und F^4_{kl}; durch jeden Punkt P der Curve geht ein Strahl p_i des Systemes X_i welcher von dem in Σ_k correspondirenden und ein Strahl p'_k des Systemes X_k, der von dem in Σ_l correspondirenden Strahle p_l im Punkte P getroffen wird.

Aus den angegebenen Eigenschaften der Punkte der verschiedenen Schnittcurven erkennt man für jeden einzelnen Fall, dass auf der Curve alle die Punkte liegen, in welchen sich drei homologe Strahlen der collinearen Räume schneiden.

Solche Punkte — die «Hauptpunkte der collinearen Räume» — bilden bekanntlich eine Raumcurve sechster Ordnung, was sich auf folgende Weise zeigen lässt.

Die Hauptpunkte besitzen die Eigenschaft, dass sie auf jeder Fläche dritter Ordnung liegen, welche durch homologe Bündel der collinearen Räume erzeugt wird. Sind nämlich $P_i\ P_k\ P_l$ drei homologe Bündel, $h_i\ h_k\ h_l$ die homologen Strahlen, welche sich in einem Hauptpunkte H schneiden, so sind $(P_i\ h_i)$ $(P_k\ h_k)$ $(P_l\ h_l)$ homologe Ebenen der drei Bündel, folglich liegt H auf der von den Bündel $P_i\ P_k\ P_l$ durch Schnittpunkte homologer Ebenen erzeugten Fläche. Eine zweite durch die homologen Bündel $P'_i\ P'_k\ P'_l$ erzeugte Fläche hat mit der ersten eine Raumcurve neunter Ordnung gemein. Diese degenerirt in die Raumcurve dritter Ordnung, welche von den projetivischen Ebenenbüscheln $P_iP'_i\ P_kP'_k\ P_lP'_l$ erzeugt wird und in eine Raumcurve sechster Ordnung. Die Raumcurve dritter Ordnung gehört nur jenem Büschel von Flächen dritter Ordnung zu, dessen Flächen durch Bündel erzeugt werden, deren Mittelpunkte resp. auf den Geraden $P_iP'_i\ P_kP'_k\ P_lP'_l$ liegen. Weil die Hauptpunkte H Punkte jeder Fläche dritter Ordnung sind, die durch drei homologe Bündel der collinearen Räume erzeugt wird, so kann die Raumcurve dritter Ordnung nicht der Ort für die Punkte H sein, diese müssen vielmehr auf dem anderen Theile der Schnittcurve d. h. auf der Raum-

curve sechster Ordnung enthalten sein. Auch zeigt sich, dass diese Curve aus den Hauptpunkten besteht; denn ist K ein Punkt, der auf beiden Flächen dritter Ordnung, aber nicht auf der Raumcurve dritter Ordnung liegt, so gehen durch ihn drei homologe Ebenen $\pi_i\ \pi_k\ \pi_l$, welche resp. zu den Bündeln $P_i\ P_k\ P_l$ und drei andere homologe Ebenen, $\pi'_i\ \pi'_k\ \pi'_l$, welche resp. zu den Bündeln $P'_i\ P'_k\ P'_l$ gehören. Die Geraden $\pi_i\,\pi'_i\ \ \pi_k\,\pi'_k\ \ \pi_l\,\pi'_l$ sind homologe Gerade der drei Räume und weil sie sich in K schneiden, ist K ein Hauptpunkt H. Darum gilt der Satz:

Die Schnittcurve irgend zweier der sechs Flächen vierter Ordnung degenerirt in eine Raumcurve zehnter Ordnung und in die von den Hauptpunkten gebildete Raumcurve sechster Ordnung.

Die unter II aufgeführte Schnittlinie sechzehnter Ordnung lässt sich vollkommen bestimmen; es können zwei Fälle eintreten: p_i und p'_i sind verschieden, p_i und p'_i sind identisch. Der zweite Fall liefert die Hauptpunkte; im ersten Falle geht durch den Punkt P der Strahl p_k des Systems X_k; er wird von dem entsprechenden Strahle p_l geschnitten; ferner der Strahl p'_l des Systems X_l, er wird von dem entsprechenden Strahle p'_k geschnitten. Weil aber p_i und p'_i sich schneiden, so treffen sich auch p_k und p'_k, p_l und p'_l; es liegen demnach die drei Strahlen p_k, p'_k und p_l und die Strahlen $p'_k\ p'_l\ p_l$ in einer Ebene. Da jede dieser Ebenen die Strahlen $p'_k\ p_l$ enthält, so liegen die homologen Strahlenpaare p_k, p'_k und p_l, p'_l in einer Ebene; diese Ebene ist Tetraederebene des

Complexes Γ_{kl}. Die Geraden, in welchen die Ebene $\alpha^{\varkappa}_{kl}$ die homologen Ebenen $\alpha'^{\varkappa}_{kl}$ des Nebentetraeders schneiden, sind Theile der Raumcurve zehnter Ordnung und nur auf diesen Geraden können die Punkte P liegen, wenn p_i und p'_i verschieden sind. Der andere Theil der Raumcurve zehnter Ordnung muss also mit der Hauptpunktscurve zusammenfallen; diese ist also ein doppelt zu zählender Bestandtheil der Raumcurve sechzehnter Ordnung. Eine beliebige Ebene schneidet die Curve in sechzehn Punkten; vier von diesen sind die Schnittpunkte der Ebene mit den vier Geraden $[\alpha^{\varkappa}_{kl}, \alpha'^{\varkappa}_{kl}]$, die übrigen zwölf die doppelt zu zählenden Punkte der Hauptpunktscurve, welche in der Ebene liegen. In jedem derselben müssen zwei Punkte, die zu beiden Flächen gehören, zusammengefallen sein, oder: die zwei ebenen Curven vierter Ordnung, in welchen die Flächen F^4_{kl} und F^4_{ii} von einer beliebigen Ebene geschnitten werden, gehen durch die sechs Hauptpunkte, welche in der Ebene liegen und haben in diesen Punkten gemeinsame Tangenten. Daraus folgt unmittelbar:

Zwei Flächen vierter Ordnung mit gleichem Index an zweiter Stelle haben in den Hauptpunkten dieselben Berührungsebenen.

Noch soll die Eigenschaft der unter III aufgeführten Schnittcurven präcisirt werden. Sind die p_i und p'_i verschieden, so gehen durch den Punkt P die homologen Strahlenpaare p_i, p'_i und p_k p'_k; P ist demnach Tetraedereckpunkt des Complexes Γ_{ik}. Um andere Punkte P zu erhalten, müssen p_i und p'_i zusammenfallen, dann sind die Strahlen p_i p'_k der

Systeme X_i resp. X_k homologe Strahlen der Räume Σ_i und Σ_k. Durch die Punkte der Raumcurve sechzehnter Ordnung gehen also homologe Strahlen p_i und p_k der Räume Σ_i und Σ_k, welche beide von dem ihnen in Σ_l correspondirenden Strahle p_l getroffen werden. Dies kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen: entweder geht p_l durch den Punkt P d. h. P ist Hauptpunkt und die Hauptpunktscurve bildet den einen Bestandtheil der Schnittcurve sechzehnter Ordnung oder p_l liegt in der Ebene $[p_i\ p_k]$; diese Punkte liegen auf einer Raumcurve zehnter Ordnung. Die homologen Strahlen bilden ein Dreieck und die Eckpunkte $(p_i\ p_k)$, $(p_k\ _l)$, $(p_l\ p_i)$ liegen resp. auf den Flächen F^4_{ik} und F^4_{ki}, F^4_{kl} und F^4_{lk}, F^4_{li} und F^4_{il}. Daraus folgt der Satz:

Die Ecken der Dreiecke, welche von homologen Strahlen der collinearen Räume gebildet werden, liegen auf drei Raumcurven zehnter Ordnung.

Ebenenbündel vierter Ordnung.

Die folgenden Entwickelungen stehen den vorausgehenden dual gegenüber.

Die Ebenen, auf welchen ein Strahl p_i des Systemes X_i und der in Σ_k correspondirende Strahl p_k liegt, bilden einen Ebenenbündel vierter Ordnung Φ^4_{ik}.

Ist nämlich m_k eine beliebige Gerade, so werden alle Geraden s_i des Raumes Σ_i, welche Strahlen des Complexes Γ_{ik} sind und in der Ebene $m_k\ s_k$ liegen gefunden, indem man die correspondirenden Ebenen der homologen Büschel m_i und

m_k der Räume Σ_i resp. Σ_k zum Durchschnitt bringt. Diese Geraden s_i bilden eine Regelschaar R_i, welcher im Raume Σ_l eine von den Geraden s_l gebildete, zu ihr projectivische Regelschaar R_l entspricht. Da sich, wie früher gezeigt wurde, von zwei projectivisch auf einander bezogenen Regelschaaren im Allgemeinen vier homologe Strahlen schneiden und die Geraden s_i, welche von den homologen s_l getroffen werden, Strahlen des Systemes X_i sind, so gehen durch die beliebige Gerade m_k vier Ebenen, welche einen Systemstrahl p_i und den in Σ_k entsprechenden p_k enthalten.

Wenn m_k Strahl des Complexes Γ_{ik} ist, so gehen die Regelschaaren R_i und R_l in Kegelflächen zweiter Ordnung über. Dass sich von zwei projectivisch aufeinander bezogenen Kegelflächen im Allgemeinen vier homologe Strahlen schneiden, erhärtet der für zwei projectivische Regelschaaren gegebene Beweis, wenn als Gerade r_i und r_l Strahlen der betreffenden Kegelflächen gewählt werden.

Haben die Büschel m_k und m_i eine Ebene entsprechend gemein [eine Ebene $\alpha^{\varkappa}_{ik}$], so erzeugen sie zwei Strahlbüschel erster Ordnung. Da von jedem derselben zwei Strahlen die homologen des in Σ_l entsprechenden Büschels schneiden, so erhält man auch in diesem Falle vier Strahlen p_i.

Die Annahme, m_k sei Tetraederkante des Complexes Γ_{ik} führt zu den Doppelebenen des Bündels Φ^{λ}_{ik}. Die Büschel m_i und m_k liegen ineinander und haben zwei Ebenen $\alpha^{\varkappa}_{ik}$ entsprechend gemein. Dem ebenen System $\alpha^{\varkappa}_{ik}$ des Raumes Σ_i entspricht ein collineares System auf $\alpha'^{\varkappa}_{ik}$ und so oft zwei entsprechende Strahlen dieser Systeme sich schneiden, ebenso

oft wird α_{ik}^{λ} als Ebene des Bündels Φ_{ik}^{4} erhalten. Die beiden Systeme erzeugen durch die Verbindungebenen entsprechender Geraden einen Ebenenbüschel E_{ik}^{3} dritter Ordnung und durch jeden Punkt auf α_{ik}^{x} gehen zwei auf α_{ik}^{x} liegenden Axen dieses Büschels. Durch jeden Punkt von α_{ik}^{x} geht deshalb ein centraler Ebenenbüschel vierter Ordnung, welcher zum Bündel Φ_{ik}^{4} gehört und für welchen α_{ik}^{x} Doppelebene ist. α_{ik}^{x} ist demnach Doppelebene des Bündels Φ_{ik}^{4}.

Es gibt sechs Ebenenbündel Φ^4, welche durch Namen und Stellung der Indices unterschieden werden. Die Fundamentalebenen eines jeden Complexes sind Doppelebenen der beiden Bündel, welche dieselben Indices besitzen wieder Complex.

Gemeinsame Büschel zweier Bündel.

Zwei der sechs Ebenenbündel vierter Ordnung haben einen Ebenenbüschel sechzehnter Ordnung gemein. Die Bündel können auf vier verschiedene Arten zu zweien zusammengestellt werden, nämlich

I. Zwei Bündel mit gleichem Index an erster Stelle wie Φ_{ik}^{4} und Φ_{il}^{4}.

II. Zwei Bündel mit gleichem Index an zweiter Stelle Φ_{ki}^{4} und Φ_{li}^{4}.

III. Zwei Bündel, welche die drei Indices besitzen, aber an keiner Stellle den gleichen; Φ_{ik}^{4} und Φ_{kl}^{4}.

IV. Zwei Bündel, welche die gleichen Indices an verschiedener Stelle besitzen wie Φ_{ik}^{4} und Φ_{ki}^{4}.

Ist φ eine Ebene, auf welcher drei homologe Strahlen

der collinearen Räume liegen, so gehört sie zu jedem Büschel sechzehnter Ordnung, der irgend zwei Bündeln gemeinsam ist. Diese Ebenen — die «Hauptebenen der collinearen Räume» — bilden bekanntlich einen Ebenenbüschel sechster Ordnung; also:

Jeder zwei Ebenenbündeln Φ^4 gemeinsame Ebenenbüschel degenerirt in einen Ebenenbüschel zehnter Ordnung und in den Ebenenbüschel sechster Ordnung, welcher von den Hauptebenen der collinearen Räume gebildet wird.

Gehört eine Ebene π zu den Bündeln Φ^4_{ki} und Φ^4_{li}, so liegt in derselben ein Strahl des Systemes X_k und der in Σ_i homologe p_i, sowie ein Strahl p'_i des Systems X_l und der in Σ_i homologe p'_i. Fallen p_i und p'_i zusammen, so decken sich p_k und p'_k, p_l und p'_l. $p_i\ p_k\ p_l$ bilden ein Dreieck und π ist Hauptebene der collinearen Räume. Sind p_i und p'_i verschieden, so wird p_k als Systemstrahl von X_k von p_l geschnitten, p'_l als Systemstrahl von X_l von p'_k. Weil aber p_i und p'_i sich schneiden, so schneiden sich p_k und p'_k; p_l und p'_l; demnach gehen die drei Strahlen $p_k\ p'_k\ p_l$ durch einen Punkt, ebenso $p_l\ p'_l\ p'_k$. Durch die beiden Punkte gehen die Strahlen $p_l\ p'_k$; es schneiden sich also die homologen Strahlenpaare p_k, p'_k und p_l, p'_l in einem Punkte. Er ist ein Punkt A^x_{kl}; p_i und p'_i schneiden sich demnach im homologen Punkte A'^x_{kl}. Nur solche Ebenen π werden bei verschiedenen p_i und p'_i erhalten, welche zu einem der Ebenenbüschel erster Ordnung gehören, deren Axe eine der Geraden $[A^x_{ik}\ A'^x_{ik}]$ ist. Der Ebenenbüschel sechzehnter Ordnung de-

generirt deshalb in die vier Ebenenbüschel erster Ordnung und den doppelt zu zählenden Ebenenbüschel sechster Ordnung, welcher von den Hauptebenen gebildet wird. Zwei Ebenenbüschel vierter Ordnung mit beliebigem gemeinsamen Centrum, von welchem der eine zum Bündel Φ^4_{ki}, der andere zum Bündel Φ^4_{li} gehört, haben also vier Ebenen, von welchen jede zu einem der Büschel erster Ordnung gehört und sechs doppelt zu zählende Ebenen des Hauptebenenbüschels gemein, haben folglich in diesen sechs Ebenen gemeinsame Berührungsstrahlen. Daraus folgt unmittelbar:

Zwei Bündel vierter Ordnung mit gleichem Index an zweiter Stelle haben in den Hauptebenen gemeinsame Berührungspunkte.

Ist π eine gemeinsame Ebene des Bündel Φ^4_{ki} und Φ^4_{ik} so liegt in π ein Strahl p_k des Systems X_k und der homologe Strahl p_i, sowie ein Strahl p'_i des Systems X_i und der homologe p'_k. Sind p_i und p'_i verschieden, so ist π eine Ebene $\alpha_{x^{ik}}$; durch diese Annahme werden nur spezielle Ebenen erhalten. Sind p_i und p'_i identisch, so sind p_i und p_k Strahlen der Systeme X_i resp. X_k, welche in den Räumen Σ_i und Σ_k homologe Gerade sind. Es werden dann p_i und p_k von dem homologen Strahle p_l geschnitten. Dies kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen: entweder liegen p_i, p_k, p_l in einer Ebene, dann ist π Hauptebene, oder p_i p_k p_l schneiden sich in einem Punkt. Man hat den Satz:

Schneiden sich die homologen Strahlen p_i p_k p_l in einem Punkt, so gehört die Ebene $(p_i\ p_k)$ zu dem Ebenbüschelen

zehnter Ordnung, der zu den Bündeln Φ^4_{ki} und Φ^4_{ik} gehört und alle solche Ebenen $(p_i\ p_k)$ erfüllen den Büschel.

Dieses und frühere Resultate gestatten, folgende sich dual gegenüber stehende Sätze aufzustellen:

Die Eckpunkte der Trieder, deren Kanten homologe Strahlen dreier collinearen Räume sind, bilden eine Raumcurve sechster Ordnung, indess die Seitenflächen drei Ebenenbüschel zehnter Ordnung erfüllen.

Die Ebenen der Dreiecke, deren Seiten homologe Strahlen dreier collinearen Räume sind, erfüllen einen Ebenenbüschel sechster Ordnung, indess die Ecken drei Raumcurven zehnter Ordnung beschreiben.